

Teoria do momento angular [SAK 3.1]

- rotações em torno de eixos diferentes não comutam. Veremos que as relações de comutação dos componentes do momento angular são consequência disso.
- Vamos começar estudando ~~essa~~ essa não-comutatividade das rotações.

Exemplo da não-comutatividade de rotações

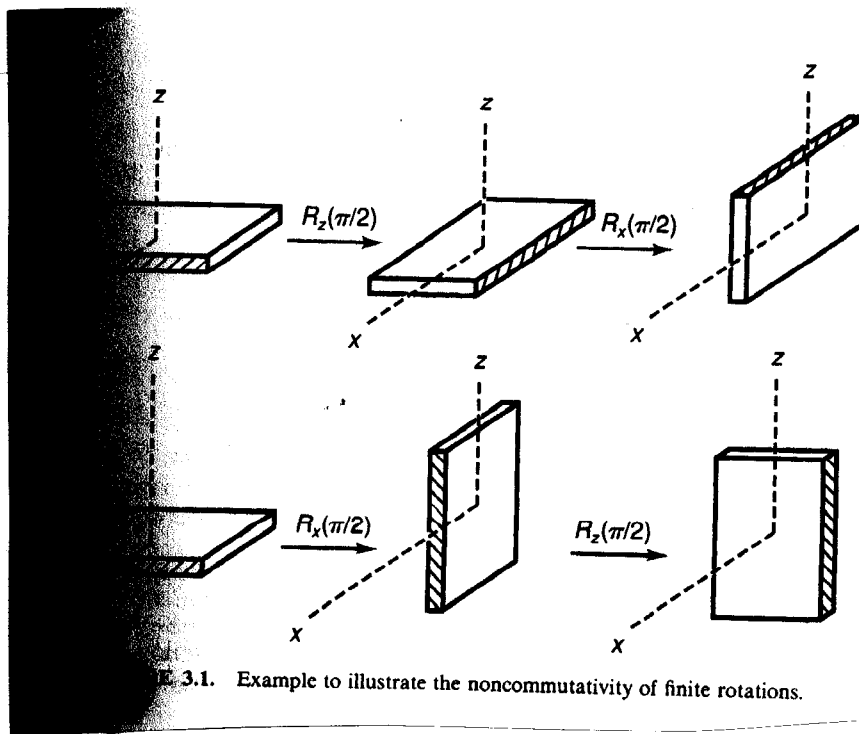


FIG. 3.1. Example to illustrate the noncommutativity of finite rotations.

Rotões - rotações no espaço R_3

• Representadas por matrizes 3×3 reais e ortogonais: $RR^T = R^T R = \mathbb{I}$.

• Vetores se transformam assim:

$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

• Matrizes ortogonais preservam a norma de $\vec{v}$.

Rotação de ϕ em torno de $\hat{z}$

• Sentido positivo = rotação avançada na direção $\hat{z} > 0$.

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

ROTAÇÕES INFINITESIMAIS

• $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$, $\sin\phi \approx \phi$ nas matrizes acima.

• Calculando $R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_z(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon^2 & 0 \\ \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{I}$ (ignorando termos de ordem ϵ^2).

$\Rightarrow$ Rotações infinitesimais em torno de eixos diferentes comutam até ordem ϵ .

$\Rightarrow$ Não comutam até ordem ϵ^2 .

ROTAÇÕES INFINITESIMAIS NA MQ

- O estado (ket) descrevendo um int. quântico vai mudar sob rotação.
- Dado um op. de rotação R (= matriz ortogonal, 3×3), associamos um op. unitário $D(R)$ no espaço $\mathcal{H}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} |d\rangle_R = D(R)|\alpha\rangle \\ \uparrow \text{rotado} & & \uparrow \text{original} \end{array}$$

- Repare que a mesma rotação R corresponde a vários op unitários $D(R)$,
correspondentes ao eixo de spin $\frac{1}{2} \rightarrow D(R)$ é unitário 2×2

$$\text{spin } 1 \rightarrow D(R) \quad 3 \times 3$$

- Já construímos dois operadores unitários infinitesimais, com forma $U_\xi = 1 - iG\xi$

$$\text{Translação: } G = \frac{P_x}{\hbar} \quad \xi = dx$$

$$\text{evolução temporal: } G = \frac{H}{\hbar} \quad \xi = dt$$

- $\Rightarrow$ Definimos o op. de momento angular J_K tal que $G = \frac{J_K}{\hbar} \quad \xi \rightarrow d\phi$,

$$D(R_K, \xi) = 1 - i \frac{J_K}{\hbar} d\phi \quad \text{descreve rotação infinitesimal em torno do eixo } K \text{ por ângulo } d\phi.$$

- De forma mais geral: $D(\hat{n}, d\phi) = 1 - i \left(\frac{\vec{J} \cdot \hat{n}}{\hbar} \right) d\phi$ = op. de rotação infinit. $d\phi$ em torno de $\hat{n}$.

- A partir do op infinitesimal, encontramos o op. de rotações finitas:

$$D_z(\phi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - i \frac{J_z}{\hbar} \frac{\phi}{N} \right)^N = \exp\left(-i \frac{J_z \phi}{\hbar}\right) = 1 - \frac{i J_z \phi}{\hbar} - \frac{J_z^2 \phi^2}{2\hbar^2} + \dots$$

- Matrizes de rotações R formam um grupo. Postulamos que $D(R)$ também logo deve ter as propriedades:

- Identidade: $R \cdot 1 = R$ $D(R) \cdot 1 = D(R)$

- Fechamento: $R_1 R_2 = R_3$ $D(R_1) D(R_2) = D(R_3)$

- Inverso: $R R^{-1} = 1$ $D(R) D^{-1}(R) = 1$

$R^{-1} R = 1$ $D^{-1}(R) D(R) = 1$

- Associatividade: $R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3 = R_1 R_2 R_3$

$D_1(D_2 D_3) = (D_1 D_2) D_3 = D_1 D_2 D_3$

- Vamos agora usar isso p/ achar as relações de comutação p/ J_K :

• Se que $R_x(\epsilon) R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon) R_x(\epsilon) = R_z(\epsilon^2) - 1$ A relação equivalente p/ D 's é:

$$\left(1 - \frac{i J_x \epsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \epsilon^2}{2 \hbar^2}\right) \left(1 - \frac{i J_y \epsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \epsilon^2}{2 \hbar^2}\right)$$

$$- \left(1 - \frac{i J_y \epsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \epsilon^2}{2 \hbar^2}\right) \left(1 - \frac{i J_x \epsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \epsilon^2}{2 \hbar^2}\right) = 1 - \frac{i J_z \epsilon^2}{\hbar} - 1$$

- Igualando os termos de ordem ϵ^2 nos 2 lados da eqn^{es} obtemos

$$\boxed{[J_x, J_y] = i \hbar J_z}$$

• Repetindo o argumento p/ outras rotações $\boxed{[J_i, J_j] = i \hbar \epsilon_{ijk} J_k}$

= relações de comutação fundamentais p/ o momento angular.

- Só usamos que $\int$ ① J_K é o gerador de rotações em torno do eixo K .
② Rotações em torno de eixos diferentes não comutam.

- $$S_x = \frac{1}{2} (1+x-1 + 1-x+1)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} (-1 + X - 1 + 1 - X + 1)$$

$$S_2 = \frac{5}{2} (1+x+1 - 1-x-1)$$

Na base $\{ |+\rangle, |-\rangle \}$ de S_z :

$$S_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- ~~SECRET~~

$$|d\rangle_R = \underbrace{\exp\left(-\frac{i S_z \phi}{\hbar}\right)}_{D_z(\phi)} |K\rangle$$

- $$\langle S_x \rangle \rightarrow \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle_R = \langle \alpha | \underbrace{D_2^\dagger(\phi) S_x D_2(\phi)} | \alpha \rangle$$

$\left| \exp\left(\frac{iS\sigma_z}{\hbar} \right) S_x \exp\left(\frac{-iS\sigma_z}{\hbar} \right) \right| \rightarrow$ Vamos calcular
de 2 formas

$$\textcircled{I} \cdot \frac{1}{2} \exp\left(\frac{iS_Z d}{\hbar}\right) \left(|+\rangle - |-\rangle \right) \exp\left(\frac{-iS_Z d}{\hbar}\right)$$

Note: $S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \Rightarrow e^{i\frac{S_z d}{\hbar}}|+\rangle = \left(1 + \frac{iS_z d}{\hbar} + \frac{i^2 S_z^2 d^2}{\hbar^2} + \dots\right)|+\rangle$

$$= \left(1 + \frac{i d \cdot \frac{\hbar}{2}}{\hbar^2} + \frac{i^2 d^2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{2} + \dots \right) |+\rangle$$

$$= \left(1 + \frac{i\mathcal{A}}{2} + \left(\frac{i\mathcal{A}}{2} \right)^2 + \dots \right) |+\rangle = e^{\frac{i\mathcal{A}}{2}} |+\rangle$$

Simultane: $\langle - | e^{-\frac{i \hat{S}_y}{\hbar}} = \langle - | e^{i \frac{\hbar}{2}}$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} \left(e^{+i\frac{\omega}{2}} |+\rangle\langle+| e^{+i\frac{\omega}{2}} + e^{-i\frac{\omega}{2}} |-\rangle\langle-| e^{-i\frac{\omega}{2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[(1+x-1 + 1-x+1) \cos \phi + i (1+x-1 - 1-x+1) \sin \phi \right]$$

$$= S_x \cos \phi - S_y \sin \phi$$

- II) Use Baker-Hausdorff: (G Hermitian, λ real)

$$\exp(i\lambda G) A \exp(-i\lambda G) = A + i\lambda [G, A] + \frac{i^2 \lambda^2}{2!} [G, [G, A]] + \dots + \frac{i^n \lambda^n}{n!} [G, [G, [G, \dots [G, A]]]]$$

$$e^{\frac{iS_z \phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z \phi}{\hbar}} = S_x + \underbrace{\frac{i\phi}{\hbar} [S_z, S_x]}_{i\hbar S_y} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 \underbrace{[S_z, [S_z, S_x]]}_{i\hbar^2 S_x} +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^3 \underbrace{[S_z, [S_z, [S_z, S_x]]]}_{i\hbar^3 S_y} + \dots$$

$$= S_x \left[1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots \right] - S_y \left[\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \dots \right] = \underline{S_x \cos \phi - S_y \sin \phi}$$

Note que o método II nos dá a representação explícita de S_x , no caso de rotações de comutação, logo pode ser usado em rot. com momento angular $> \frac{1}{2}$.

• Temos então: $\langle S_x \rangle \rightarrow \sum_R \langle S_x | R \rangle_R = \langle S_x \rangle \cos \phi - \langle S_y \rangle \sin \phi$

De forma similar: $\langle S_y \rangle \longrightarrow \langle S_y \rangle \cos \phi + \langle S_x \rangle \sin \phi$

$$\langle S_z \rangle \rightarrow \langle S_z \rangle \quad (\text{pois } [S_z, D_z(\phi)] = 0).$$

$\Rightarrow$ os valores esperados são rotados de ϕ em torno do $\hat{z}$, como esperado.

• De maneira mais geral, op. de momento angular (p. q. H) satisfazem:

$$\langle J_K \rangle \rightarrow \sum_x R_{Kx} \langle J_x \rangle$$

$\nwarrow$ matriz de rotação

- Vamos agora examinar o efeito de rotações no eixo z sobre estado arbitrário de spin $\frac{1}{2}$: $|\alpha\rangle = |+\rangle\langle +|\alpha\rangle + |-\rangle\langle -|\alpha\rangle$

$$e^{-\frac{iS_z t}{\hbar}} |\alpha\rangle = e^{-\frac{i\hbar}{2}} |+\rangle\langle +|\alpha\rangle + e^{\frac{i\hbar}{2}} |-\rangle\langle -|\alpha\rangle$$

- Se fizermos rotações de 2π : $|\alpha\rangle \rightarrow -|\alpha\rangle$!

$$4\pi: |\alpha\rangle \rightarrow |\alpha\rangle \text{ de novo.}$$

Este efeito estranho tem consequências observáveis.

Precessão de spin $\frac{1}{2}$ como rotação

- Campo $\vec{B} = B\hat{e}$. $H = -\frac{e}{mc} \vec{S} \cdot \vec{B} = \omega S_z$ com $\omega \equiv \frac{e\hbar B}{mc}$

- O operador de evolução temporal é: $U(t,0) = \exp(-\frac{iHt}{\hbar}) = \exp(-\frac{iS_z \omega t}{\hbar})$

ou seja, é igual ao op de rotações em torno de $\hat{e}$ ~~em~~ ^{por} ângulo $\phi = \omega t$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle S_x \rangle_t = \langle S_x \rangle_{t=0} \cos \omega t - \langle S_y \rangle_{t=0} \sin \omega t \\ \langle S_y \rangle_t = \langle S_y \rangle_{t=0} \cos \omega t + \langle S_x \rangle_{t=0} \sin \omega t \\ \langle S_z \rangle_t = \langle S_z \rangle_0 \end{cases}$$

Depois de $t = \frac{2\pi}{\omega}$, o spin dá 1 volta
 $t = \frac{4\pi}{\omega}$, o spin volta ao estado inicial.

- Experimentos que observam esse efeito foram feitos (K75-RAUCH et al.)
 Werner et al.

[Feixe de nêutrons é dividido, um sub-feixe precessiona e outro não, a diferença de fase resulta em interferência quando feixes são recombinados.]